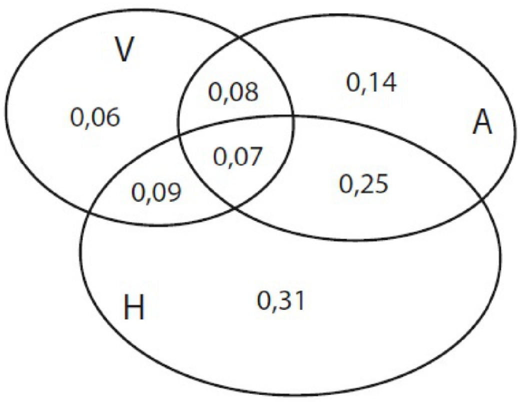
5. Correction des exercices

Exercice 12.1 L'univers est l'ensemble E des élèves de la classe. Il y a équiprobabilité.
a) L'événement $\overline{T \cup C}$ s'énonce "l'élève n'appartient ni au club théâtre ni à la chorale" ; il contient 18 élèves.
Donc l'événement contraire $T \cup C$ contient 35-18=17, donc $P(T \cup C) = \frac{17}{35}$.
b) On a la formule (vue en seconde) : $P(T \cup C) = P(T) + P(C) - P(T \cap C)$. Il vient :
$P(T \cap C) = P(T) + P(C) - P(T \cup C)$
$P(T \cap C) = \frac{10}{35} + \frac{12}{35} - \frac{17}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$

Exercice 12.2 1) L'univers contient $6 \times 5 \times 4 = 120$ tirages possibles. tous les tirages sont équiprobables.
Une issue favorable à A est du type : NNN.
Il y a 4 choix pour la première boule noire, 3 choix pour la deuxième, et 2 choix pour la troisième.
$P(A) = \frac{4\times3\times2}{6\times5\times4} = \frac{1}{5}$
Une issue favorable à B est du type : BNN ou NBN ou NNB.
Il y a 2 choix possibles pour la boule blanche, 4 choix pour la première boule noire et 3 choix pour la deuxième.
$P(B) = \frac{3\times(2\times4\times3)}{6\times5\times4} = \frac{3}{5}$.
Une issue favorable à C est du type BBN ou BNB ou NBB.
Il y a 2 choix pour la première boule blanche, et 1 choix pour la deuxième, enfin 4 choix pour la boule noire.
$P(C) = \frac{3\times(2\times1\times4)}{6\times5\times4} = \frac{1}{5}$.

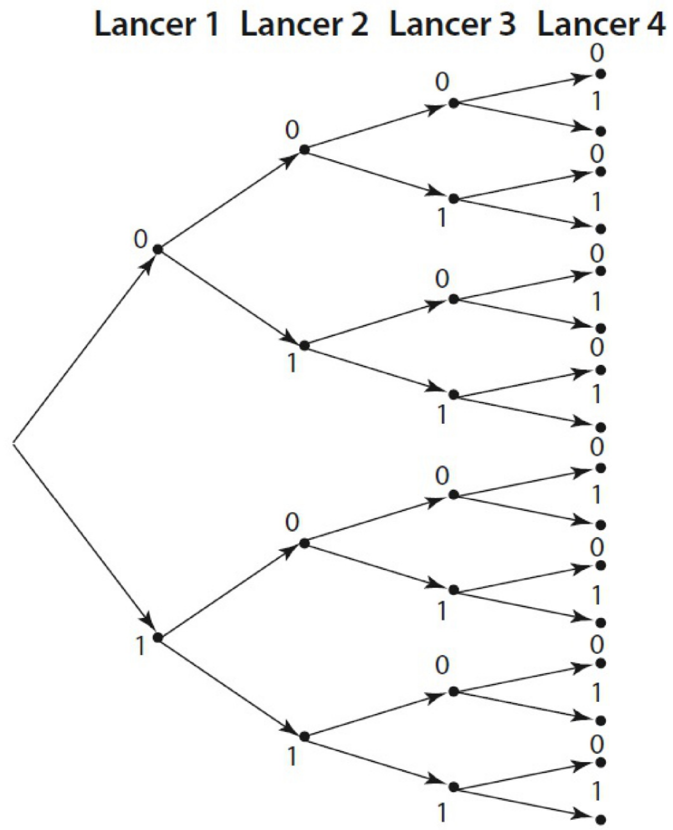
2.a) Dans le cas d'un tirage avec remise, l'univers contient $6 \times 6 \times 6 = 216$ issues, toutes équiprobables.
$P(A) = \frac{4^3}{6^3} = \frac{8}{27}$
$P(B) = \frac{3\times(2\times4^2)}{6^3} = \frac{4}{9}$
$P(C) = \frac{3\times(2^2\times4)}{6^3} = \frac{2}{9}$
2.b) $P(A) + P(B) + P(C) = \frac{26}{27}$. Cette somme est différente de 1. Lors d'un tirage avec remise, il peut aussi se produire l'éventualité D : "Le tirage contient trois boules blanches", avec $P(D) = \frac{2^3}{6^3} = \frac{1}{27}$.
Alors, $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 1$

Exercice 12.3 1) Diagramme :



2) L'univers est l'ensemble des assurés. Il y a équiprobabilité.
2.a) $P(A \cap V \cap H) = 0,07$;
$P(A \cap V) = 0,07 + 0,08 = 0,15$;
$P(A \cup H) = 0,31 + 0,25 + 0,07 + 0,09 + 0,14 + 0,08 = 0,94$.
2.b) $P(\overline{H} \cap A) = 0,08 + 0,14 = 0,22$;
$P(\overline{H} \cap \overline{V}) = 0,14$.
2.c) $P(\overline{A \cup H}) = 1 - P(A \cup H) = 1 - 0,94 = 0,06$;
$P(\overline{A \cup V}) = 1 - P(A \cup V) = 1 - 0,69 = 0,31$.
3) $E = \overline{V} \cap A \cap H$, d'où $P(E) = 0,25$.
$F = A \cap \overline{H} \cap \overline{V}$, d'où $P(F) = 0,14$.
$G = A \cap V \cap \overline{H}$, d'où $P(G) = 0,08$.

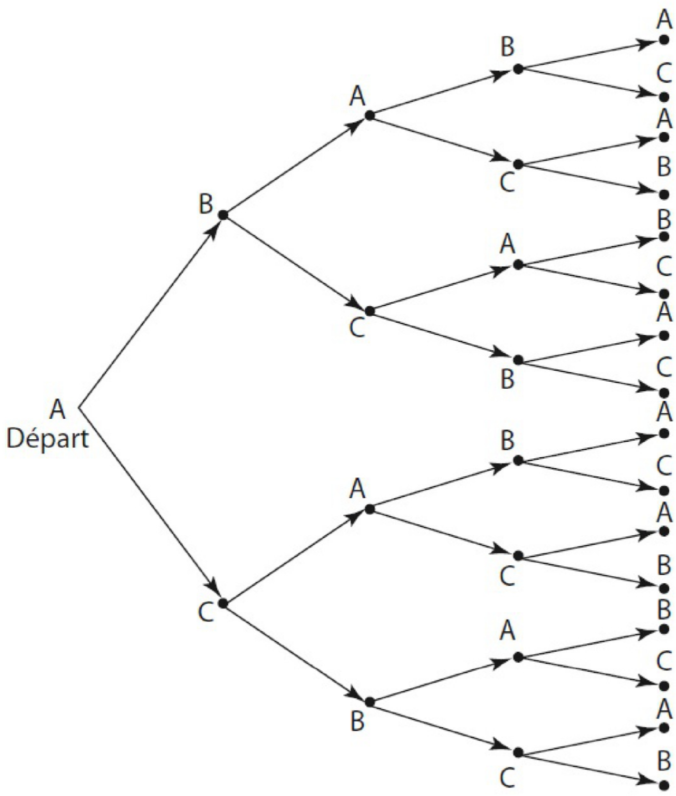
Exercice 12.4 1) On code "1" la sortie "Face" et "0" la sortie "Pile". L'univers est l'ensemble des quadruplets (*liste de 4 nombres dans laquelle "l'ordre compte"*) formés de 0 et de 1. toutes les issues sont équiprobables.
On peut dessiner un arbre de probabilités :



N prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4.
Le nombre de sorties "face" associé à une issue est le nombre de "1" dans l'écriture du quadruplet. Par exemple si l'on a obtenu Pile-Face-Face-Face, le quadruplet est (0 ;1 ;1 ;1), et dans ce cas, N prend la valeur 3 car il le chiffre "1" est écrite 3 fois dans le quadruplet.
<u>On obtient ainsi la loi de N :</u>

n_i	0	1	2	3	4
$P(N = n_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

<u>Exercice</u> 12.5 1) On peut faire un arbre de probabilités. Toutes les issues (chemins) sont équiprobables.



X prend les valeurs 0, 1, 2.
La loi de X est :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$

Exercice 12.6 1) Une issue est un quadruplet de chiffres dont le premier est 2. Voici l'allure d'une issue :

2	• 10 choix	• 10 choix	• 10 choix

L'univers contient donc $10 \times 10 \times 10 = 1000$ issues équiprobables.
X prend les valeurs 1, 2, 3, 4 (le premier chiffre de la combinaison est connu, donc il est toujours bien placé).
- L'événement "X=4" contient une seule issue : c'est "la bonne combinaison".
- L'événement "X=1" contient des issues du type :

2	• 9 choix	• 9 choix	• 9 choix

Dans ce cas, seul le chiffre 2 est correct. Il y a 9 possibilités pour chaque case, car il y a 9 nombres qui ne sont "pas le bon nombre"pour les autres chiffres de la combinaison.
Il y a donc $9 \times 9 \times 9 = 729$ issues favorables à cet événement.
- L'événement "X=2" contient des issues du type :

2	* *1 choix*	• 9 choix	• 9 choix

2	• 9 choix	* *1 choix*	• 9 choix

2	• 9 choix	• 9 choix	* *1 choix*

Il y a donc 243 issues favorables à cet événement.
- L'événement "X=3" contient des issues du type :

2	* *1 choix*	* *1 choix*	• 9 choix

2	* *1 choix*	• 9 choix	* *1 choix*

2	• 9 choix	* *1 choix*	* *1 choix*

Il y a donc 27 issues favorables à cet événement.

La loi de X est donc :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,729	0,243	0,027	0,001

2) $E(X) = 1,3$ et $\sigma(X) \simeq 0,52$.

Exercice 12.7 1) L'univers est $E = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Toutes les issues sont équiprobables.
Loi de C :

k	0	1	4
$P(C = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

2) $E(C) = 2$; $V(C) = \frac{14}{5} = 2,8$.

<u>Exercice</u> 12.8 1) L'univers est l'ensemble de la production des tiges filetées. Toutes les issues sont équiprobables.
Loi de D :

d en mm	15,8	16	16,1	16,3
$P(D=d)$	$\frac{38}{140}=\frac{19}{70}$	$\frac{41}{140}$	$\frac{45}{140}=\frac{9}{28}$	$\frac{16}{140}=\frac{4}{35}$

2) Loi de L :

l en mm	84	85	86	87
$P(L=l)$	$\frac{20}{140}=\frac{1}{7}$	$\frac{59}{140}$	$\frac{37}{140}$	$\frac{24}{140}=\frac{6}{35}$

3) $P(U)=\frac{30}{140}=\frac{3}{14}$ et $P(R)=\frac{5}{140}=\frac{1}{28}$.

<u>Exercice</u> 12.9 1) tableau de probabilités :

	S	$\overline{S}$	
B	0,56	0,14	0,7
$\overline{B}$	0,015	0,285	0,3
	0,575	0,425	1

2) $\overline{B}\cap S$ signifie "il n'y a pas, sur zone, de banc de poissons mais le sonar en a détecté un".
$P(\overline{B}\cap S)=0,015$
3.a) Loi de probabilité de X :

x_i	-150	-400	2000
$P(X=x_i)$	0,425	0,015	0,56

3.b) Le gain moyen par sortie correspond à $E(X)=1050,25e$.

<u>Exercice</u> 12.10 1) L'univers est l'ensemble des abonnés. Il y a équiprobabilité.
Loi de N :

k	4	5	6	7	8
$P(N=k)$	0,09	0,12	0,36	0,18	0,25

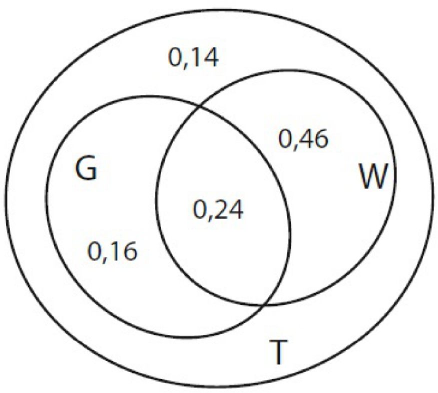
On trouve $P(N=8)$ en cherchant le complément à 1 de la somme des autres probabilités.
$E(N)=6,38$.
2.a) $S=15N+100$.
2.b) La dépense moyenne par abonné attendue est $E(S)$.
$E(S)=E(15N+100)=15E(S)+100=195,70$€.

<u>Exercice</u> 12.11 1) Loi de X :

k	80	50	0	$-10a$
$P(X=k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$

On ne soustrait pas le "coût" du jeton des gains ou pertes éventuels, car le jeton est donné par l'exploitant ; il ne coûte donc rien au joueur.
2.a) $E(X)=12-6a$
$E(X)=0\Leftrightarrow a=2$.
Ainsi le jeu est équitable lorsque la valeur du jeton est 2€.
2.b) L'exploitant a intérêt à fixer $a>2$; ainsi, $E(X)<0$ et le jeu lui sera favorable.

<u>Exercice</u> 12.12 1.a) Schéma de la situation :



$P(G\cup W)=P(G)+P(W)-P(G\cap W)$
$P(G\cup W)=0,4+0,7-0,24=0,86$

1.b) ”Le téléphone n’a aucune des deux options” est l’événement $\overline{G \cup W}$, et $P(\overline{G \cup W}) = 0,14$.
2.a) Loi de X :

x_i	0	6	12	18
$P(X = x_i)$	0,14	0,46	0,16	0,24

2.b) $E(X) = 9$€.
2.c) On note Y la variable aléatoire qui donne le coût total d’équipement. $Y = 200.000X$.
D’où $E(Y) = 200.000 \times E(X) = 1.800.000$€.
Ainsi, en moyenne, le coût de revient total peut être estimé à 1,8 million d’euros.